

**EGZAMIN ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI
CZĘŚĆ ZADANIOWA
ROZWIĄZANIA WZORCOWE**

01.02.2024

Zadanie 1. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Rozważmy relację $\sim_A$ na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zdefiniowaną warunkiem:

$$f \sim_A g \iff \forall a \in A f(a) = g(a), \quad \text{dla } f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

- a) Udowodnij, że dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ relacja $\sim_A$ jest relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Niech $A \subseteq \mathbb{N}$.

Relacja $\sim_A$ ta jest zwrotna na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, bowiem dla każdego $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, dla każdego $a \in A$, $f(a) = f(a)$, a zatem $f \sim_A f$.

Jest również symetryczna, bowiem jeśli $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ są takie, że $f \sim_A g$, to dla każdego $a \in A$, $f(a) = g(a)$, a zatem oczywiście, $g(a) = f(a)$ dla $a \in A$. Zatem $g \sim_A f$.

Jest w końcu przechodnia, bowiem jeśli $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ są takie, że $f \sim_A g$ i $g \sim_A h$, to dla każdego $a \in A$, $f(a) = g(a)$ oraz $g(a) = h(a)$, a zatem oczywiście, $f(a) = h(a)$ dla $a \in A$. Zatem $f \sim_A h$.

Powyższe dowodzi, że $\sim_A$ jest relacją równoważności.

- b) Niech $f_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie ciągiem stale równym zero oraz niech $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 2024\}$. Znajdź moc zbioru $[f_0]_{\sim_X}$.

Zauważmy, że $g \sim_X f_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $n \leq 2024$, $g(n) = f_0(n) = 0$. Rozważmy zatem funkcję $F: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow [f_0]_{\sim_X}$ zdefiniowaną wzorem:

$$(F(h))(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ dla } n \leq 2024 \\ h(n - 2025) & , \text{ wpp.} \end{cases}.$$

Oczywiście dla każdego $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $F(h) \in [f_0]_{\sim_X}$, więc funkcja F jest dobrze zdefiniowana. Ponadto F jest funkcją różnowartościową, bowiem jeśli $F(h_1) = F(h_2)$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $h_1(n) = (F(h_1))(n + 2025) = (F(h_2))(n + 2025) = h_2(n)$, a więc $h_1 = h_2$. Wobec tego $|[f_0]_{\sim_X}| \geq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. Oczywiście $[f_0]_{\sim_X} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, zatem na mocy tw. Cantora-Bernsteina, $|[f_0]_{\sim_X}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, czyli jest mocy continuum.

- c) Udowodnij, że zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \sim_A$ jest mocy continuum wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem nieskończonym.

Rozważmy funkcję $F: \mathbb{N}^A \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taką, że

$$(F(f))(n) = \begin{cases} F(n) & , \text{ dla } n \in A \\ 0 & , \text{ wpp.} \end{cases}.$$

oraz funkcję $G: \mathbb{N}^A \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim_A$ taką, że $G(f) = [F(f)]_{\sim_A}$. Zauważmy, że G jest funkcją różnowartościową. Rzeczywiście, jeśli $f, g \in \mathbb{N}^A$ są takie, że $G(f) = G(g)$, to $F(f) \simeq F(g)$, a zatem dla każdego $n \in A$, $f(n) = (F(f))(n) = (F(g))(n) = g(n)$, a więc $f = g$. To oznacza, że $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim_A| \geq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. Ponadto G jest funkcją „na”. Rzeczywiście, niech $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oraz niech f będzie funkcją g obciętą do A , czyli $f \in \mathbb{N}^A$, $f = g \upharpoonright A$. Wtedy $G(f) = [g]_{\sim_A}$, bowiem dla każdego $n \in A$, $(F(f))(n) = f(n) = g(n)$, czyli $F(f) \sim_A g$. A zatem $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim_A| = |\mathbb{N}^A|$. Jeśli A jest nieskończonym podzbiorem $\mathbb{N}$, to $|A| = |\mathbb{N}|$ i $|\mathbb{N}^A| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, a zatem $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim_A$ jest mocy continuum. Jeśli za to A jest skończony, to $\mathbb{N}^A$ jest zbiorem przeliczalnym (gdy $A \neq \emptyset$) lub jednoelementowym (gdy $A = \emptyset$), a zatem w tym przypadku zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim_A$ nie jest mocy continuum.

- d) Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Rozważmy funkcję $F: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{R}$, która zbiorowi $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ przyporządkowuje relację $\sim_A$. Rozstrzygnij, czy funkcja F jest różnowartościowa oraz czy jest na zbiór $\mathcal{R}$.

F jest funkcją różnowartościową. Rzeczywiście, niech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ oraz dla każdych $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, niech $f \sim_A g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \sim_B g$. Niech $x \in A$. Niech $f_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie funkcją stale równą 0 oraz niech $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zdefiniowane jako

$$g(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } n = x \\ 0 & , \text{ wpp.} \end{cases}$$

Wtedy $f_0 \not\sim_A g$, bowiem $f_0(x) \neq g(x)$ oraz $x \in A$. Zatem $f_0 \not\sim_B g$, a skoro x jest jedynym argumentem dla którego wartości f_0 oraz g się różnią, to $x \in B$. Analogicznie można dowieść, że jeśli $x \in B$, to $x \in A$, a zatem $A = B$, co dowodzi tego, że F jest różnowartościowa.

F nie jest „na”. Rzeczywiście, niech $\simeq$ będzie relacją na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taką, że dla $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f \simeq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2|(f(0) - g(0))$. Oczywiście $\simeq$ jest relacją równoważności na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Twierdzą, że dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$, relacja $\sim_A$ różni się od relacji $\simeq$. Rzeczywiście, założmy przeciwnie, niech $A \subseteq \mathbb{N}$, będzie taki zbiorem, że relacje $\sim_A$ oraz $\simeq$ są równe. Niech f_0, f_1, f_2 będą funkcjami stałymi odpowiednio równymi 0, 1 i 2. Mamy $f_0 \simeq f_2$, ale dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $f_0(n) \neq f_2(n)$, a zatem jeśli $f_0 \sim_A f_2$, to $A = \emptyset$. Tymczasem $f_0 \not\sim_{\emptyset} f_1$, ale $f_0 \sim_{\emptyset} f_1$ – co stanowi sprzeczność.

Zadanie 2. Rozważmy relację $\preceq$ na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ określoną następująco:

$$A \preceq B \iff \left(|A| < |B| \vee (|A| = |B| \wedge A \subseteq B) \right) \quad \text{dla } A, B \subseteq \mathbb{R}.$$

- a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ częściowo porządkuje zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Rzeczywiście relacja ta jest zwrotna na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, bowiem, dla każdego $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $|A| = |A|$ oraz $A \subseteq A$, więc $A \preceq A$.

Jest też antysymetryczna. Załóżmy bowiem, że $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ są takie, że $A \preceq B$ oraz $B \preceq A$. Zauważamy, że nie może jednocześnie zachodzić $|A| < |B|$ oraz $|B| < |A|$ lub $|B| = |A|$, a także $|B| < |A|$ oraz $|A| < |B|$ lub $|A| = |B|$. To oznacza, że $|A| = |B|$ i $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$, a więc $A = B$.

Jest w końcu relacją przechodnią. Załóżmy bowiem, że $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ są takie, że $A \preceq B$ oraz $B \preceq C$. Rozważmy następujące przypadki:

- jeśli $|A| < |B|$, to dostajemy, że $|A| < |B| \leq |C|$, zatem $|A| < |C|$ i $A \preceq C$,
- jeśli $|B| < |C|$, to dostajemy, że $|A| \leq |B| < |C|$, zatem $|A| < |C|$ i $A \preceq C$,
- jeśli $|A| = |B|$ oraz $|B| = |C|$, to $|A| = |C|$. Mamy też wtedy dodatkowo, że $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq C$, a więc $A \subseteq C$, co daje $A \preceq C$.

Zatem $\preceq$ jest częściowym porządkiem na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

- b) Niech $\mathcal{X} = \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| \leq 2024\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Wyznacz moce zbiorów elementów maksymalnych i minimalnych¹ rodziny $\mathcal{X}$.

Zauważmy, że $\emptyset$ jest elementem najmniejszym w $\mathcal{X}$. Rzeczywiście, jeśli $A \in \mathcal{X}$, to albo $A = \emptyset$ (i wtedy $\emptyset \preceq A$), albo $|A| > 0 = |\emptyset|$ (i wtedy również $\emptyset \preceq A$). Zatem $\emptyset$ jest jedynym elementem minimalnym, co oznacza, że zbiór wszystkich elementów minimalnych $\{\emptyset\}$ ma moc 1.

Zauważmy, że zbiór $A \in \mathcal{X}$ jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy $|X| = 2024$. Rzeczywiście, jeśli $X \in \mathcal{X}$ oraz $|X| = 2024$, oraz $Y \in \mathcal{X}$ jest zbiorem takim, że $X \preceq Y$, to $|Y| \geq 2024$, a więc $|Y| = 2024$ oraz $X \subseteq Y$. Jednak skoro X, Y są skończonymi zbiorami o tej samej mocy, to w tej sytuacji $X = Y$. Jeśli natomiast $X \in \mathcal{X}$ oraz $|X| \neq 2024$, to $|X| < 2024$ i wtedy jeśli $Y = \{0, 1, \dots, 2023\}$, to $|Y| = 2024 > |X|$, więc $X \preceq Y$, ale $X \neq Y$, a więc X nie jest maksymalny. Zatem zbiorem wszystkich elementów maksymalnych jest zbiór wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$, które mają 2024 elementy. Jest takich zbiorów oczywiście co najmniej continuum wiele, ale też nie więcej niż elementów zbioru $\mathbb{R}^{2024}$, który jest mocy continuum. Zatem zbiór wszystkich elementów maksymalnych ma moc continuum.

- c) Niech $\mathcal{Y} = \{Y \subseteq \mathbb{Q} : |Y| = |\mathbb{N}|\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Wyznacz, o ile istnieją, kres górny i kres dolny rodziny $\mathcal{Y}$ w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \preceq \rangle$.

Twierdzę, że $\sup \mathcal{Y} = \mathbb{Q}$. Rzeczywiście $\mathbb{Q} \in \mathcal{Y}$ oraz dla każdego zbioru $X \in \mathcal{Y}$ mamy $|X| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ oraz $X \subseteq \mathbb{Q}$, więc $X \preceq \mathbb{Q}$. To oznacza, że $\mathbb{Q}$ jest ograniczeniem górnym rodziny $\mathcal{Y}$, które do niej należy – musi być więc jej kresem górnym.

Kres dolny tego zbioru za to nie istnieje. Zauważmy najpierw, że jeśli $X \subseteq \mathbb{R}$ oraz $|X| > |\mathbb{N}|$, to X nie jest ograniczeniem dolnym $\mathcal{Y}$. Po drugie, jeśli $X \subseteq \mathbb{R}$ oraz $|X| = |\mathbb{N}|$ i $X \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, to X też nie jest ograniczeniem dolnym $\mathcal{Y}$, bo $X \not\subseteq \mathbb{Q} \in \mathcal{Y}$. Żaden element $X \in \mathcal{Y}$ nie jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{Y}$, bowiem wtedy dla $x_0 \in X$, $X \setminus \{x_0\} \in \mathcal{Y}$ – jest bowiem też przeliczalnym podzbiorem zbioru liczb wymiernych oraz $X \setminus \{x_0\} \preceq X$, ale $X \setminus \{x_0\} \neq X$. Oczywiście, jeśli $X \subseteq \mathbb{R}$ oraz $|X| < |\mathbb{N}|$ (a więc jeśli X jest zbiorem skończonym), to X jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{Y}$, bowiem dla każdego $Y \in \mathcal{Y}$ mamy $|X| < |Y|$, więc $X \preceq Y$. Wynika z tego, że zbiór wszystkich ograniczeń dolnych rodziny $\mathcal{Y}$, to zbiór $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{R})$ wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{R}$. Zbiór ten jednak nie ma elementu największego, bowiem jeśli $X \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{R})$, to $X \cup \{\max(X) + 1\} \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{R})$ oraz $|X| < |X \cup \{\max(X) + 1\}|$, więc $X \preceq X \cup \{\max(X) + 1\}$, ale $X \neq X \cup \{\max(X) + 1\}$. Oznacza to, że badana rodzina nie ma kresu dolnego.

¹Uwaga: chodzi o moc zbioru elementów maksymalnych i moc zbiorów elementów minimalnych, a nie o "moce elementów maksymalnych i minimalnych".

- d) Rozstrzygnij, czy zbiory częściowo uporządkowane $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \preceq \rangle$ oraz $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$ są izomorficzne.

Nie są. W porządku $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$ każdy niepusty podzbiór $\mathcal{X}$ ma kres dolny. Jest nim $\bigcap \mathcal{X}$. Rzeczywiście, z twierdzenia z wykładu wiadomo, że dla każdego $X \in \mathcal{X}$, $\bigcap \mathcal{X} \subseteq X$ oraz jeśli $C \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla każdego $X \in \mathcal{X}$, $C \subseteq X$, to $C \subseteq \bigcap \mathcal{X}$. Tymczasem z poprzedniego podpunktu wiemy, że w porządku $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \preceq \rangle$ istnieje niepusty podzbiór bez kresu dolnego.